

工学部数理データサイエンスコース
石原 卓

洗濯乾くか？ → 外に干す／乾燥機使う
花粉は多いか？ → 花粉対策する／しない

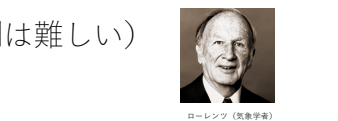
データが必要
なにもかも
数学のおかげ

気象予報の結果を誤訳・修正
天気 気温
大雨予報と作風
予報官や気象予報士が予報を検討・発表

石原 卓

①観測データを収集
②スーパーコンピュータで
③未来の気象を予測
④数値予報

- https://tenki.jp/suppl/m_seta/2024/05/23/32452.html



<https://www.jma.go.jp/jma/kishou/known/whitep/1-3-1.html>

2次元的な 流れの中の密度の変化

- ある場所の空気密度 $\rho(\vec{x}, t)$ の従う法則

- 密度 $\rho(\vec{x}, t)$ は流れ $\vec{u}(\vec{x}, t) = (u, v)$ によって運ばれる

- ある領域の密度はその息を取り囲む境界を通して、

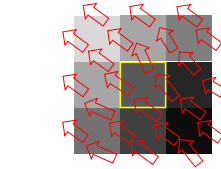
流入があれば増加
流出があれば減少

質量の保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

密度の時間変化 移流の効果 その領域の膨張/収縮

ある場所の**密度の時間変化**は、その場所の**流体の状態**によって決まる



非圧縮で密度一定の場合
 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

10

2次元的な 流れの中の速度の変化

- ある場所の空気速度 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ の従う法則

- 運動量 $\rho \vec{u}(\vec{x}, t)$ が流れ $\vec{u}(\vec{x}, t)$ によって運ばれる (非線形)

- ある領域の空気の運動量はその領域を取り囲む境界を通して、

運動量の流入があれば増加
運動量の流出があれば減少
また、
その領域の空気に働く力によって増減する

運動量の保存則

速度の時間変化の方程式 (流体の方程式)

2次元的な流れの 流体の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{partial y^2} \right) \end{aligned}$$

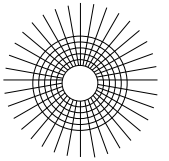
速度の時間変化 移流の効果 気圧傾度力 外力 粘性摩擦力

非線形

ある場所の空気**速度の時間変化**は、その場所の**流体の状態**とその場所の**流体に働く力**によって決まる

非線形の方程式なので数学の問題として解くことが難しい

しかし、計算機を使えば、格子点上の速度の数値を求めることができる



12

タイガー計算機による数値計算

川口光年(1953)

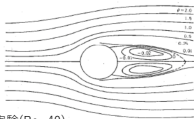
円柱の周りの遅い流れを計算
(3.6m/hの水流に径4cmの棒) Re=40

タイガー計算機で毎週20時間、
約1年半を要する大計算

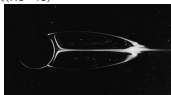


123*43 7回ハンドルを回す!

数値計算(Re=40)



実験(Re=40)



13

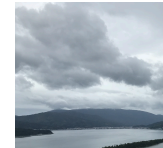
3次元的な流れの 流体の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

速度の時間変化 移流の効果 気圧傾度力 外力 粘性摩擦力

非線形

実際の流れはとても複雑なので、
計算機を使って解くことができる流れは限定的



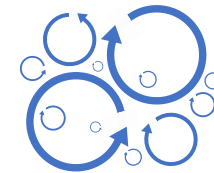
14

移流項(非線形)の役割

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

移流項(非線形)

- どんどん細かいスケールの変動を作り出す。

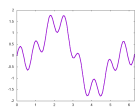


レオナルド・ダビンチ

15

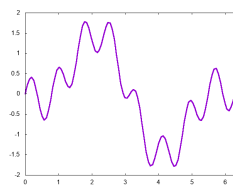
粘性項の役割

- 変動を減衰させる
細かいスケールほど速く



$\sin(x) - 0.75 * \sin(2*x) + 0.5 * \sin(8*x)$

$a_1(t) * \sin(x) + a_2(t) * \sin(2*x) + a_3(t) * \sin(8*x)$



$a_n(t) \propto \exp(-\nu n^2 t)$

16

非線形性の強さを表すパラメータ



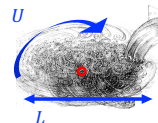
- レイノルズ数: $Re = \frac{UL}{\nu}$

U : エネルギー保有渦の速度の大きさ

L : エネルギー保有渦のサイズ

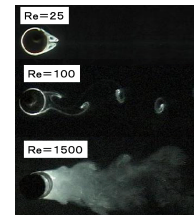
ν : 動粘性係数 (空気 $1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$)

$Re \sim \frac{\text{非線形項の大きさ}}{\text{粘性項の大きさ}} \propto \text{非線形性の強さ}$

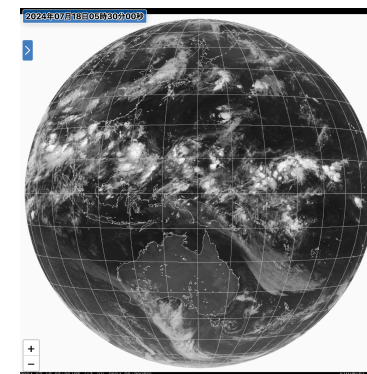


エネルギー保有渦 $\propto Re^{3/4}$
最小渦

計算コスト $\propto Re^3$



例) 物を通る流れ
Re~10^5: 100km/hの野球ボール
Re>10^6: 100km/hの車



- 日本周辺の天気予報にも全球の大気の情報が必要
- 大きい渦(>数千km)、小さい渦(<mm)
→ まともには扱えない
- 格子は細かい方がいい
- 計算資源は有限、時間も有限
→ 気象庁の全球モデル
13km格子128層

17

スーパーコンピュータの活用

・計算機の処理速度の向上

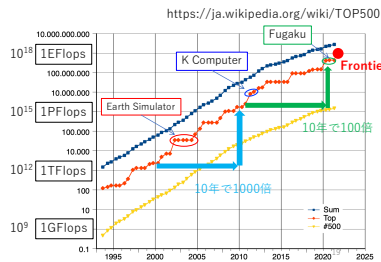
- 高速演算
(2024年最速: 1.2EFlops)

計算機の速さ (Flops)
= 1秒に何回演算できるか

iPhone14pro: 約17TFlops

富岳: 約440PFlops

2.6万倍



基礎方程式の特徴

・決定論的

- ある時刻 t の $(u, v, w, \rho, \theta, q)$ の値が全ての $\vec{x}$ で与えられれば → 右辺の各項が決定 → その時刻の $(u, v, w, \rho, \theta, q)$ の時間変化が決定
- 初期値があれば未来が決める!

・非線形

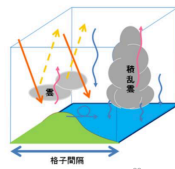
- 速度の時間変化を記述する方程式の移流項が非線形
- 予測が困難

・物理過程

- 粗い格子で現象を記述する良い数値モデルが必要

参考: 簡単なモデルで温暖化予測 (眞鍋先生)

https://www.jma.go.jp/jma/kishou/books/mwpkaisetu/R5/1_4_1.pdf



大気の状態とその変化の従う法則

・大気の状態

- 風の水平速度 : u, v 運動量 (水平成分) の保存則
- 風の鉛直速度 : w 運動量 (鉛直成分) の保存則
- 密度 : ρ 質量の保存則
- 温位 (基準を定めた温度) : θ エネルギーの保存則
- 水蒸気密度 : q 水蒸気の保存則

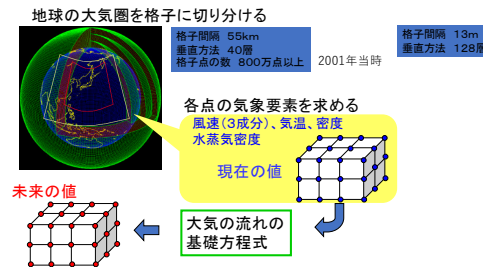
- $(u, v, w, \rho, \theta, q)$ これらは全て場所 $\vec{x}$ と時間 t の関数

大気の状態の変化を記述する基礎方程式

力学過程				物理過程
水平方向の運動方程式	水平速度の時間変化 =	移流の効果 + コリオリの効果 + 水平の気圧傾度力	+	外力
鉛直方向の運動方程式 (非線形方程式)	鉛直速度の時間変化 =	移流の効果 + コリオリの効果 + 鉛直の気圧傾度力 + 重力	+	外力
静力学平衡の式 (静力学モデル)	θ =	鉛直の気圧傾度力 + 重力		
連続の式	密度の時間変化 =	移流の効果 + 収束・発散の効果		
熱力学方程式	温度の時間変化 =	移流の効果 + 断熱圧縮・膨張による変化	+	非断熱加熱
水蒸気予測式	比湿の時間変化 =	移流の効果	+	相変化に伴う加熱

その他に状態方程式等

計算機を用いた流れの数値シミュレーション



数値計算の概要

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = H(x, t) \quad \text{ある点 } x \text{ での } f \text{ の時間変化率が } H$$

$$\frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} \approx H(x, t)$$

原理: 毎回 H を評価して少しずつ時間を進める

$$\begin{aligned} f(x, 0) & \leftarrow \text{初期条件} \\ f(x, \Delta t) & \approx f(x, 0) + \Delta t H(x, 0) \\ f(x, 2\Delta t) & \approx f(x, \Delta t) + \Delta t H(x, \Delta t) \\ & \vdots \\ f(x, n\Delta t) & \approx f(x, (n-1)\Delta t) + \Delta t H(x, (n-1)\Delta t) \end{aligned} \quad \begin{aligned} t &= 0 \\ t &= \Delta t \\ t &= 2\Delta t \\ &\vdots \\ t &= n\Delta t \end{aligned}$$

ところで、初期値はどうやって作るの?

- これは非常に良い質問!
- 予測精度を上げるには、**良い数値予報モデル**と**良い初期値**

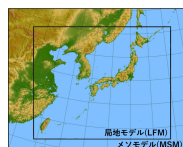
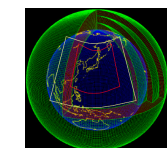
- 観測データ << 格子点の数

① 観測データを収集

気温、風、雨量など

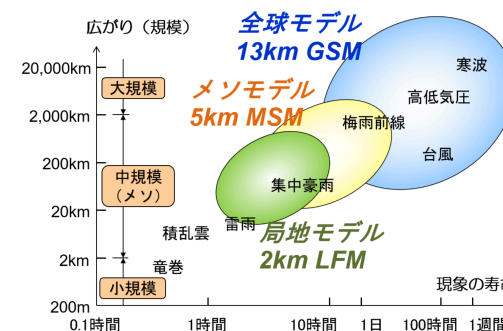


数値予報モデルのシミュレーションの結果 (格子点上の値) を観測データを用いて補正する「データ同化」という技術が使われています



気象庁が運用する気象に関する数値予報モデル					
数値予報システム (名称)	全球モデル (GSM)	メソモデル (MSM)	局所モデル (LFM)	全球アンサンブル予報システム (GEPs)	メソアンサンブル予報システム (MEPs)
予報領域	地球全体	日本周辺	日本周辺	地球全体	日本周辺
格子間隔	13km	5km	2km	18日先まで約27km 18~34日先まで約40km	約5km
鉛直層数	128層	96層	76層	128層	96層
予報期間	11日間 5.5日間	78日間 39日間	18日間 10日間	18日間 18日間 11日間 5.5日間	1日15時間 7か月
実行回数 (初動後の時間)	1日2回 (00, 12UTC) 1日2回 (06, 18UTC)	1日2回 (00, 12UTC) 1日4回 (03, 06, 09, 15, 18, 21UTC)	1日8回 (00, 03, 06, 09, 12, 15, 18, 21UTC) 1日16回 (上記以外の正時)	24日間 (12UTC 水・木) 1日1回 (12UTC) 1日2回 (00, 12UTC) 1日4回 (06, 18UTC)	1日4回 (00, 06, 12, 18UTC)
モデルのデータを利用する情報 (気象庁)	台風予報 分庁予報 局所予報 週間天気予報 航空気象情報	防災気象情報 気象監視予報 航空気象情報 分庁予報 週間天気予報 航空気象情報	防災気象情報 気象監視予報 降水短時間予報 降水短時間予報 1か月予報	台風予報 週間天気予報 航空気象情報 分庁予報 週間天気予報 航空気象情報	3か月予報 週間天気予報 週間天気予報 エルニーニョ 監視予報

日本気象協会 tenki.jp



気象庁の数値予報モデルが対象とする気象現象の水平及び時間スケール

関数の極小について

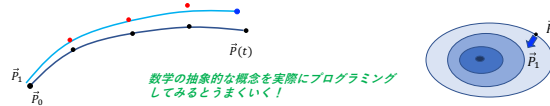
- 関数 $f(x)$ の極小値の見つけ方
 - x_0 で f の傾き df/dx の値を求め、正なら負の方向、負なら正の方向に少しずらす。すなわち、 $x_1 = x_0 - (df/dx) \varepsilon$ として同様な操作を繰り返す。
- 関数 $f(x, y)$ の極小値の見つけ方
 - (x_0, y_0) で f の等高線に垂直な勾配ベクトル $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ を求め、 $(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \varepsilon$ とし、同様な操作を繰り返す。



28

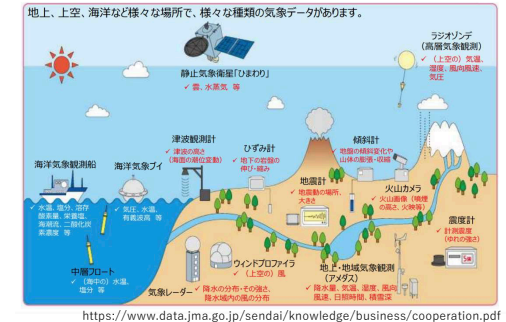
データ同化（4次元変分法）の考え方

- 数値予報モデル $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}(\vec{P}, t)$ の初期値 $\vec{P}_0$ の数値解を $\vec{P}(t)$ とすると、数値予報モデルと観測データとの差 J は $\vec{P}_0$ の関数。すなわち $J = J(\vec{P}_0)$
- 数学的には $\vec{P}_0$ を $\delta\vec{P}_0$ ずらしたときの J のずれ δJ の表現が得られ、それから $\vec{P}_0$ における J の勾配ベクトル ∇J の表現を求めることができる。よって、 $\vec{P}_1 = \vec{P}_0 - \varepsilon \nabla J$ として観測データとの差の小さい初期条件を生成可能



29

気象庁が保有するデータ

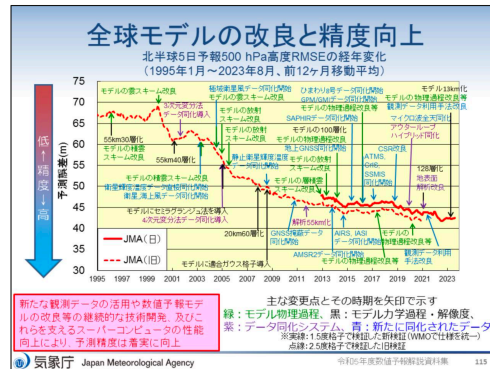


30

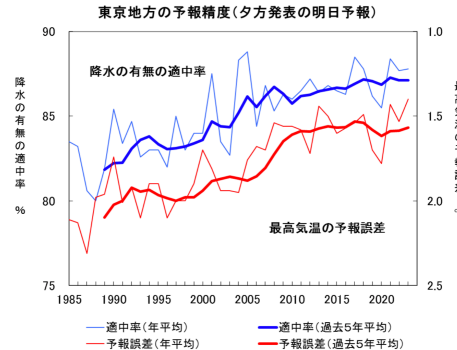
天気予報の課題

- 線状降水帯は、現状の観測・予測技術では正確な予測が困難。
 - 線状降水帯の発生メカニズムに未解明な点がある
 - 線状降水帯周辺の大気の3次元分布が正確にはわかっていない
 - 予想のための数値予報モデルに課題がある
(https://www.jma.go.jp/jma/kishou/known/yohokaisetu/senjoukousuitai_oame.html)
- 近年、時間・空間規模の小さい積乱雲に伴う局地的な豪雨による災害が目立ち、防災上の観点から、その予測精度向上への要請が強まっている。

33



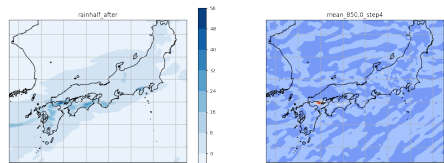
31



32

線状降水帯に対する我々の取り組み1

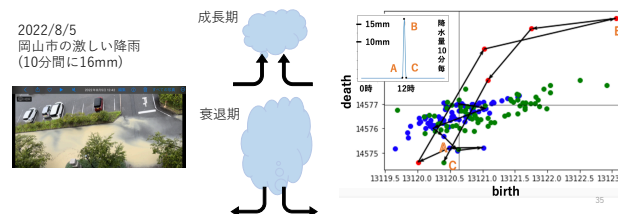
- 数値予報モデルの初期値に使われるデータを用いて、上空の乱流の流れの構造に着目した解析を実施し、1時間後の線状降水帯の発生位置を予測



34

局地的大雨に対する我々の取り組み2

- 複数の周辺観測地点の風向・風速データの情報から、積乱雲成長時の強い上昇気流（局地的大雨の予兆）を検出



35

まとめ

- 近年の天気予報は、数学とスパコンとデータを駆使しています
 - 大気の現象を支配する法則を式で表した「数値予報モデル」を
 - 「スーパーコンピュータ」を用いて「数値シミュレーション」し、未来を予測します。
 - 予測の精度を維持するため、「さまざまな観測データ」を活用し「データ同化」という手法で、観測データと整合する新しい初期値を生成し、新たな数値シミュレーションに備えます。
- 数理データサイエンスコースでは
 - 現代の先端的な技術を支える、数学とスパコン(計算機)とデータの活用の仕方について学ぶことができます！

36